

# MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO

José Marcos LOPES<sup>1</sup>

**Resumo:** O artigo descreve os resultados de uma pesquisa que objetivou introduzir os conceitos básicos sobre a teoria de matrizes, determinantes e sistemas lineares, utilizando-se a Metodologia de Resolução de Problemas no ensino médio. As ações foram desenvolvidas através de um projeto do Núcleo de Ensino da UNESP – Campus de Ilha Solteira, em três escolas de ensino médio, duas da cidade de Andradina (SP) e uma de Pereira Barreto (SP). Existem várias interpretações para a metodologia de resolução de problemas. Concebemos a Resolução de Problemas em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a qual deve ser utilizada como ponto de partida para a construção dos conceitos matemáticos. Assim, o que se pretende é ensinar matemática através da resolução de problemas. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Nesta interpretação, os alunos tornam-se agentes ativos na construção de seu próprio conhecimento.

**Palavras-chave:** matrizes; determinantes; sistemas lineares; resolução de problemas; ensino.

## INTRODUÇÃO

Existe uma cultura generalizada de que a matemática é difícil, ciência para poucos, a maioria da população não entende e pior, acredita que pode viver muito bem sem ela.

É comum aparecer na mídia pessoas dizendo “odeio matemática”. Recentemente, uma rede de TV aberta do Brasil, exibiu matéria em seu horário nobre de jornalismo, sobre as dificuldades do ensino de Matemática no Brasil. O apresentador abriu a matéria fazendo a seguinte pergunta. Qual o valor de  $13 \times 8$ ? A matéria seguiu mostrando um professor em sala de aula, discutindo equações logarítmicas; mostrou um aluno que compreendia bem o que estava estudando e também um outro aluno que disse “detesto Matemática”, quero passar no vestibular e nunca mais ter que estudar isso. No fechamento da matéria jornalística, o que coincidiu com o término do telejornal, o apresentador deu a resposta para a pergunta de multiplicação que havia feito no início, despediu-se e fez um questionamento sobre as dificuldades em matemática à sua colega apresentadora do telejornal. Esta respondeu, resolver aquela equação, “nem pensar - impossível”. Em tempo, a equação mostrada na matéria podia ser resolvida diretamente pela definição de logaritmo. Será que a maioria da população sabe o que é logaritmo? Para que serve? Frequentemente, é divulgado pela mídia a ocorrência de terremotos, notícias sobre o excesso de barulho nas cidades e notícias envolvendo o pH de substâncias; em todas essas medidas, abalos sísmicos, decibéis e pH utilizam-se escalas logarítmicas.

---

<sup>1</sup> Núcleo de Ensino de Ilha Solteira. Departamento de Matemática – FEIS/UNESP

Certa vez, faltando poucas corridas para o término de um campeonato de Fórmula 1, um repórter fez uma pergunta ao piloto Ayrton Senna da Silva, a qual envolvia os números de pontos a serem obtidos pelo piloto, em cada uma das corridas finais, para que o mesmo pudesse se sagrar campeão. Ayrton respondeu, nunca fui muito bom em Matemática, meu negócio é vencer as corridas. Será que o fenomenal piloto Ayrton, nunca usou a Matemática para o acerto de seus carros? Será que nunca usou a Matemática para discutir seus contratos e cuidar de seu patrimônio?

As dificuldades encontradas pelos alunos, para o estudo de sistemas lineares, podem ser confirmadas através dos dois relatos de alunos, quando do início da aplicação do projeto:

[...] essa matéria é muito complicada, e para nós está sendo difícil, quando penso que estou conseguindo, tudo se complica mais.

Eu achei essa matéria muito diferente das outras, muito complicada e difícil. Eu me confundia tudo, misturava uma conta na outra enfim eu achei um pouco difícil.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs),

a Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. O ensino da Matemática deve relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras) e também relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, deve favorecer conexões com outras disciplinas, com o cotidiano do aluno e também conexões com os diferentes temas matemáticos. O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem (BRASIL - b, 1997, p. 19).

Vários pesquisadores da área de educação matemática, já constataram que as crianças que chegam ao ensino fundamental gostam de Matemática. Entretanto, o gosto e o interesse por esta disciplina decresce proporcionalmente conforme o aluno avança em sua escolarização. É comum ouvir de alunos dos últimos ciclos do ensino fundamental, e também do ensino médio, “detesto Matemática”. Provavelmente o formalismo e o rigor desta ciência, bem como os próprios professores, contribuam para tal aversão.

Todos os profissionais que atuam nesta área devem trabalhar no sentido de eliminar o estigma de que a Matemática é uma ciência para poucos e privilegiados indivíduos, apenas para os “gênios”, pelo contrário, todos podem e devem aprendê-la.

Testes de rendimentos aplicados pelos governos estadual e federal, indicam um baixo desempenho dos alunos na área de Matemática. Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como a disciplina que contribui significativamente para a elevação das taxas de retenção.

Polya, no prefácio da segunda edição de seu clássico livro “A arte de resolver problemas”, aponta os professores como grandes responsáveis por esta aversão e indiferença pela Matemática:

[...] a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática [...]. Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la (POLYA, 1986, p. viii).

De acordo com os PCNs – a, (2000, p. 40), os alunos devem perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras com as quais é possível modelar a realidade e interpretá-la. A Matemática deve também ser vista como ciência, assim suas definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outras e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados, a aquisição do conhecimento matemático está vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático, esse domínio passa por um processo lento e trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas.

Segundo Braumann (2002),

aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detetivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002 apud PONTE et al., 2003, p.19).

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Polya (1997),

resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão. Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem. Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra-cabeças e toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os (POLYA, 1997, p. 2). (grifo nosso).

A pesquisa em Resolução de Problemas apresenta uma evolução desde a clássica obra de Polya (1945) – A arte de Resolver Problemas. Conforme destacado por Onuchic (1999), Schroeder & Lester (1989, p. 31 - 4), apresentam três modos diferentes de abordar Resolução de Problemas, a saber: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas. O que de certa forma coincide com as interpretações de Mendonça (1993) e destacado em Grandó e Fazzion (2001, p. 23):

1ª interpretação	2ª interpretação	3ª interpretação
Resolução de problemas como <b>objetivo final</b>	Resolução de problemas como <b>processo heurístico</b>	Resolução de problemas como <b>ponto de partida</b> para a construção de conceitos matemáticos
- ensina-se a teoria, o conteúdo, para resolver problemas.	- desenvolve-se o potencial heurístico do aluno como resolvidor de problemas; - objetiva-se aprimorar a escolha de estratégias.	- o problema “dispara” o movimento de aprendizagem, ou seja, o problema é visto como desencadeador da formação de conceitos matemáticos; - valorização do raciocínio abduutivo.

A primeira interpretação, é a tradicionalmente usada para o ensino em matemática. O professor faz a exposição da matéria, resolve alguns exemplos usando os conceitos apresentados e aos alunos é cobrado a tarefa de resolver problemas semelhantes (similares). Os problemas são utilizados apenas como forma de aplicação e verificação de conhecimentos adquiridos anteriormente. Nesse caso, a concepção de ensino e aprendizagem se dá por um processo de reprodução/imitação.

Na segunda interpretação, a resolução de problemas é tratada como um processo heurístico. O que se objetiva é tornar o aluno um bom resolvidor de problemas através do seu aprimoramento na escolha de estratégias. Polya (1945), estabelece quatro fases para se resolver um problema:

1 – *É preciso compreender o problema.* Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

2 – *Estabelecimento de um plano.* Qual a conexão entre os dados e a incógnita? Conhece um problema correlato? É possível reformular o problema? É possível imaginar um problema correlato mais simples? É possível resolver uma parte do problema? Utilizou todos os dados? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

3 – *Execução do plano.* Verifique cada passo do plano escolhido. É possível demonstrar que ele está correto?

4 – *Retrospecto.* Examine a solução obtida. É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um outro caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Para Mendonça ( 1993, p. 260), o desenvolvimento desta estratégia em sala de aula pode ser realizada da seguinte forma: “propor problemas, analisar os passos e recursos da solução dos alunos e trabalhar no sentido da melhoria das estratégias usadas na solução dos mesmos.”

Na terceira interpretação, a qual consideramos ser a perspectiva atual de utilização desta metodologia, o que se pretende é ensinar matemática através da resolução de problemas. A resolução de problemas como uma metodologia de ensino é relativamente recente e segundo Onuchic (1999, p. 207) é a abordagem mais consistente com as recomendações dos PCNs.

A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Assim na análise dessas situações pode-se utilizar recursos abordados na Matemática, lançar mão de situações-problema para a construção e aplicação de conceitos matemáticos. Em termos metodológicos, relativos ao ensino do conteúdo, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, isto é, de situações em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los. A situação-problema deve expressar aspectos chaves para o conceito que se quer estudar, o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas. Assim, um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos através de uma série de generalizações.

Segundo os PCNs (1997),

a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, MEC/SEF, 1997 - b, p. 43).

Quando se pretende ensinar matemática através da resolução de problemas, o problema deve ser cuidadosamente escolhido e servirá como um elemento para disparar o processo de construção do conhecimento, este deverá contribuir para a formação dos conceitos que se pretender estudar, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal, o foco está na ação por parte dos alunos. Vários problemas deverão ser propostos e resolvidos livremente pelos próprios alunos, o trabalho em grupo neste caso é bastante adequado. Ao professor cabe o papel de observador, organizador e motivador para o objetivo que se quer alcançar.

Para Mendonça ( 1993, p. 260), “ os problemas são propostos ou formulados para contribuir na formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática.”

Para Grandó e Fazzion (2001, p. 24), numa perspectiva didático-metodológica envolvendo a terceira interpretação, o aluno é ativo, assumindo uma postura de investigador e construtor do seu próprio conhecimento, a resposta correta tem seu valor diminuído e a ênfase deve ser dada ao processo de resolução, o erro serve para a reflexão do aluno sobre sua ação e é importante para o professor pois o ajuda a compreender e interpretar o desenvolvimento das idéias do aluno.

Uma estratégia bastante adequada para o trabalho com esta metodologia em sala de aula é aquela proposta por Onuchic (1999, p. 216 - 17).

#### *Formar grupos – entregar uma atividade*

Lembrar que, no mundo real, aprender é, muitas vezes, um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. Muito da aprendizagem em sala de aula será feita em pequenos grupos.

#### *O papel do professor*

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

#### *Resultados na lousa*

Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotará na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.

#### *Plenária*

Chama os alunos todos, de todos os grupos, para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

#### *Análise dos resultados*

Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

### *Consenso*

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

### *Formalização*

Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetiva aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto.

Como pode ser observado pelas etapas propostas por Onuchic, a utilização desta metodologia em sala de aula é mais trabalhosa para o professor, entretanto, muito mais produtiva para os alunos.

É mais cômodo para o professor trabalhar na forma tradicional de ensino de matemática (primeira interpretação), nesta, o professor finge que ensina e os alunos fingem que aprendem. Na verdade, alguns poucos alunos irão aprender matemática nesta forma de ensino, estes aprenderiam de qualquer maneira, provavelmente até mesmo sem a ajuda do professor.

O trabalho em grupo é também importante na formação das capacidades cognitivas e afetivas. Um aluno, por si só, provavelmente não tenha coragem de defender a solução que apresentou para determinado problema, mas depois de socializar esta solução com os elementos do grupo, se sentirá mais seguro para defender suas idéias.

Segundo os PCNs, o trabalho em grupo propicia aos alunos as seguintes aprendizagens:

perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;  
saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro;  
discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias idéias;  
incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender ( BRASIL, MEC/SEF, 1997 – b , p. 40).

Os problemas iniciais serão utilizados para a introdução e a sistematização dos conceitos, assim deverão ser problemas simples e de fácil interpretação. Sempre que possível, materiais concretos e problemas contextualizados deverão ser utilizados. Após o trabalho com a resolução de vários problemas, e da análise do professor, é que o conceito matemático deverá ser sistematizado através do formalismo e rigor característicos desta ciência. Assim, neste momento apresenta-se as definições, fórmulas, propriedades e proposições do tópico estudado.

Após esta sistematização, como forma de reforço ao estudo dos conceitos matemáticos, é conveniente que o professor ofereça uma nova bateria de problemas (exercícios) aos alunos. Neste caso, se o aluno compreendeu bem os conceitos, então as

soluções para estes problemas serão obtidas com maior facilidade através do uso de fórmulas e propriedades envolvidas naquele tópico matemático.

De acordo como os PCN<sub>+</sub> (1997, p. 113), os exercícios do tipo “calcule ...”, “resolva ...” não devem ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho.

Segundo Grandó e Fazzion (2001),

Na prática de sala de aula, observa-se uma preocupação por parte de alguns professores em assumi-la como uma metodologia de ensino alternativa, embora tais manifestações ainda representem atitudes isoladas, desvinculadas de um projeto pedagógico. Na verdade, cada professor utiliza um enfoque para a resolução de problemas, segundo suas próprias concepções de aluno, professor e ensino-aprendizagem da Matemática (GRANDÓ E FAZZION, 2001, p. 23 - 4).

Brousseau (1996), desenvolveu uma teoria para a educação matemática, a qual denominou de situação didática. Neste caso, se estabelece uma relação entre um grupo de alunos e um professor que usa um meio didático, incluindo problemas, materiais e instrumentos, com a finalidade de ajudar seus alunos a reconstruir um certo conhecimento. Para obtenção da aprendizagem, o aluno deve interessar-se pessoalmente pela resolução do problema estabelecido na situação didática. De acordo com este autor,

o trabalho intelectual do aluno deve ser em certos momentos comparável ao dos próprios matemáticos. O aluno deve ter a oportunidade de investigar sobre problemas ao seu alcance, formular, provar, construir modelos, linguagens, conceitos, teorias, intercambiar suas idéias com os outros, reconhecer as que são adequadas com a cultura matemática e adotar as idéias que sejam úteis. Pelo contrário, o trabalho do professor é de certa maneira inverso ao trabalho do matemático profissional. Em lugar de “inventar” métodos matemáticos adequados para resolver problemas, deve “inventar” problemas interessantes que conduzem a um certo conhecimento matemático (BROSSEAU, 1996 apud BATANERO, 2001, p. 124 - 25). (grifo nosso).

O trabalho com a metodologia de resolução de problemas, como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos será mais motivador para os alunos se apresentado juntamente com a utilização de recursos tecnológicos como a máquina de calcular e o computador. Trabalhar com esta metodologia requer paciência, pois o processo é vagaroso e cheio de idas e vindas, cabendo ao professor a orientação dos alunos, sem atropelar o processo de criação. Cada nova colocação sobre um problema necessita de tempo para que os alunos compreendam e se decidam por condutas de ação nem sempre as mais eficientes e às vezes incorretas. Assim sendo, um único problema pode ocupar varias aulas, seguidas ou não, sendo necessário sacrificar a quantidade de problemas em favor da qualidade de ensino. Outras metodologias como por exemplo, o jogo e a história da matemática, podem também contribuir para tornar a utilização da resolução de problemas bastante atraente para os alunos.

Entendemos que utilizando a metodologia de resolução de problemas, a seqüência mais adequada para se introduzir esta importante parte da álgebra no ensino médio é a seguinte. Inicia-se o estudo com sistemas lineares, com ênfase na “montagem” do sistema linear e no método de escalonamento. Posteriormente, estuda-se a teoria de matrizes, considerando as operações básicas, suas principais propriedades e destacando o fato que matrizes surgem naturalmente no estudo de sistemas lineares. Finalmente, apresenta-se o conceito de determinantes, de modo que estes surjam durante a resolução de sistemas lineares. Fecha-se o tópico com o estudo do método de Cramer para a solução de um sistema linear e o cálculo da matriz inversa usando o conceito de cofatores.

## **O TRABALHO DESENVOLVIDO**

O projeto “Matrizes, determinantes e sistemas lineares através da metodologia de resolução de problemas para o ensino médio”, foi desenvolvido dentro do Programa do Núcleo de Ensino, vinculado à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira/UNESP, reuniu duas professoras da rede estadual de ensino e uma aluna bolsista. O projeto foi aplicado em três salas de ensino médio, duas na cidade de Andradina (SP) e uma de Pereira Barreto (SP). As duas professoras que participaram do projeto, já haviam feito vários cursos de formação continuada dentro dos programas Pró-Ciências e Teia do Saber, junto ao Departamento de Matemática da UNESP/Ilha Solteira e o material básico, utilizado no projeto foi um texto que escrevemos para o projeto Teia do Saber de 2005. As professoras A e B, possuem larga experiência de docência no ensino médio, 10 e 20 anos respectivamente.

Apesar da experiência e do fato de já terem participado de vários cursos de formação continuada, nos quais a metodologia de resolução de problemas havia sido utilizada, as professoras se sentiram um pouco inseguras no início do projeto. A principal dúvida das professoras era “Como será aplicada essa nova metodologia de ensino?”. Este tipo de insegurança é normal, tendo em vista que as professoras deveriam mudar a sua forma de trabalho. Isto foi superado pelas reuniões que fizemos antes do início da aplicação do projeto. Nestas reuniões, participavam o professor coordenador, as duas professoras da rede estadual de ensino e a aluna bolsista.

As duas professoras já haviam trabalhado com a metodologia de resolução de problemas em outros tópicos, como exemplos: Análise Combinatória, Probabilidade e Funções. Entretanto, nunca haviam utilizado esta metodologia em suas práticas pedagógicas, para o ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares.

A aluna bolsista apresentou este nosso projeto na XII Reunião de Iniciação Científica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira e também no XVIII Congresso de Iniciação Científica da Unesp.

## O TÓPICO SISTEMAS LINEARES

O estudo sobre sistemas lineares, objetivou fornecer ao aluno do ensino médio uma ferramenta eficaz para a resolução de problemas, equacionados através de sistemas lineares, com no máximo 3 equações e 3 incógnitas. Aprender a resolver um sistema linear deverá decorrer da necessidade de solucionar alguma situação-problema. Um sistema de equações lineares pode ser resolvido sem a utilização de uma técnica específica, entretanto o excesso de trabalho que isso apresenta, justifica a utilização de alguma técnica que sistematize e simplifique seu processo de resolução. No nosso entender, a técnica mais conveniente neste caso é a de escalonamento – eliminação de Gauss, a qual baseia-se em combinações lineares das equações do sistema.

Para sistemas lineares de ordem baixa ( $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$ ) a Regra de Cramer pode também ser utilizada, entretanto se o sistema linear possui 20 equações e 20 incógnitas e utilizarmos um computador que efetua cerca de cem milhões de multiplicações por segundo, o método de Cramer demoraria  $3 \times 10^8$  anos para resolver este sistema (claro que sem contar com problemas como queda de energia, defeitos na máquina, e etc.). Usando o computador mencionado acima e o método de eliminação de Gauss, a solução do sistema é obtida em poucos segundos. Para um sistema linear com 4 equações e 4 incógnitas a Regra de Cramer já não é conveniente. Neste caso, precisamos calcular o valor de 5 determinantes de matrizes de ordem  $4 \times 4$ .

A idéia inicial foi trabalhar com problemas simples, de modo que os alunos pudessem resolvê-los, apenas usando raciocínios lógicos, sem a “montagem” do sistema linear. Para uma etapa posterior os sistemas lineares representarão o modelo matemático de algum problema “real” que estaremos interessados em resolver. Os alunos propunham livremente suas soluções, através dos processos ou métodos de resolução que aprenderam no ensino fundamental: método da substituição e método da adição. Basicamente, o trabalho com estes problemas tiveram os seguintes objetivos:

- representar o problema “real” através do modelo matemático que corresponde a um sistema linear;
- aprender a classificar um sistema linear como: determinado, indeterminado e impossível;
- discutir as propriedades que serão utilizadas na resolução do sistema linear, através da técnica de escalonamento e
- fazer com que o aluno perceba que geometricamente, no caso  $2 \times 2$ , cada equação representa a equação de uma reta no plano cartesiano. Assim resolver um sistema linear com duas equações e duas incógnitas é equivalente a determinar-se (caso exista) a intersecção dessas duas retas.

Os objetivos mencionados acima, eram metas que o professor deveria atingir, assim estas não foram mencionados aos alunos naquele momento. Ao professor coube o papel de selecionar adequadamente os problemas para que estes objetivos fossem alcançados. Posteriormente, foram trabalhados problemas com o objetivo de fazer com que os alunos “redescubram” as chamadas operações elementares entre linhas de um sistema linear, as quais fornecem a base teórica do método de escalonamento.

Dos depoimentos das professoras sobre o trabalho com sistemas lineares, acreditamos ter alcançado algum resultado positivo no processo de ensino e aprendizagem:

Gostei muito de apresentar aos alunos esta nova forma de abordagem de sistema linear. Percebi em comparação aos outros anos, que os alunos tiveram mais facilidade, entenderam melhor o significado e a aplicação do conteúdo (Professora A ).

Em comparação com outros dois 2<sup>os</sup> anos em que estou trabalhando o “tradicional”, tenho observado um bom envolvimento dos alunos na busca pela solução. Nos grupos acontece a troca de idéias e a colaboração. Considero a aula com o projeto mais interessante, pois é sensível a participação do aluno na construção do conhecimento. Por vezes me surpreendi com idéias e soluções apresentadas. Sinto que a fixação é mais eficiente, isto, porém, só será confirmado em avaliações futuras ( Professora B ).

Parte do depoimento da Professora B, coincide com o estabelecido em Ponte et al. (2003),

é muito natural que os alunos formulem questões em que o professor não pensou. De fato, é mesmo impossível antever todas as explorações que podem surgir a partir de uma tarefa matemática verdadeiramente aberta e estimulante ( PONTE et al., 2003, p. 49 - 50).

Os problemas iniciais envolveram sistemas lineares com apenas duas equações e duas incógnitas. Estes problemas iniciais, incluindo a interpretação geométrica, não trouxeram muitas dificuldades para a maioria dos alunos. Conforme depoimento da Professora A, “como a maioria dos problemas envolvia somente duas incógnitas, eles tiraram de letra, dois grupos de alunos sentiam ainda grandes dificuldades. [...] mas, quando apareceram os problemas com três incógnitas eles (alunos) sentiram mais dificuldades”. O objetivo de se trabalhar com um sistema  $2 \times 2$  é perceber as propriedades gerais para posterior aplicação e resolução de sistemas  $3 \times 3$  ou de dimensão maior. Pelo depoimento da Professora A, parece que este objetivo não foi plenamente alcançado pela maioria dos alunos. Entretanto, considero oportuno destacar parte do depoimento de um grupo de 3 alunos desta professora:

eu acho que esse método foi ótimo, pois dá ao aluno a liberdade de se virar como pode e depois o caminho das fórmulas acaba se tornando mais fácil.

Assim, estes alunos perceberam os benefícios do uso desta metodologia no sentido em que os conceitos matemáticos são por eles construídos. O aluno não é mais aquele ser passivo, que recebe pronto os conceitos e depois tenta utilizá-los na resolução de problemas similares. Neste último caso, os alunos precisam apenas retirar os números que aparecem no enunciado do problema e utilizar a fórmula. Se mudarmos uma palavra do enunciado, os alunos não mais conseguirão resolver o problema.

No início, o trabalho com esta metodologia será mais difícil, tanto para o professor quanto para os alunos, ambos estão acostumados a trabalharem na forma tradicional. Por parte dos alunos, isto pode ser confirmado no relato de um grupo de alunos da professora B:

bom professora, eu achei um pouco difícil, porque não tinha nenhuma fórmula para fazer o problema. O meu grupo assim como os outros [...] foram jogando no “bicho”, até chegar a resposta, é que nem um quebra-cabeça. Mas para chegar a resposta é preciso ter muito raciocínio.

Percebe-se do depoimento, que o objetivo principal da utilização da resolução de problemas, como uma forma para se ensinar matemática, estava sendo alcançado; ou seja; buscamos através do uso desta metodologia o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização e utilização de fórmulas.

## **O TÓPICO MATRIZES**

A teoria de matrizes tem aplicações em diversas áreas do conhecimento humano. Como exemplos na física, economia, estatística, psicologia e etc. Com o advento do computador, grandes quantidades de informações podem ser armazenadas e manipuladas de maneira bastante rápida com o uso de matrizes. É difícil convencer os alunos do ensino médio da importância da teoria de matrizes. Para a maioria dos alunos esta teoria não passa de um amontoado de regras difíceis de serem compreendidas e manipuladas e sem utilidade prática. Para tentar superar este obstáculo consideramos útil trabalhar com matrizes somente após o trabalho com sistemas lineares e introduzir os conceitos através da metodologia de resolução de problemas.

Adotando esta seqüência da matéria, as matrizes surgem naturalmente durante a resolução de sistemas lineares pelo método de escalonamento, as variáveis (incógnitas) não precisam ser escritas durante a fase de escalonamento do sistema linear, podem ficar “escondidas”.

A utilização da metodologia de resolução de problemas teve por objetivo fazer com que o aluno percebesse que o arranjo das informações em formato de tabelas (matrizes) torna a tarefa de resolver um problema bem mais simples e atrativa.

Inicialmente, para a sistematização dos conceitos de linhas, colunas e a notação e definição de matrizes, utilizamos problemas do tipo: “Representar através de uma tabela, a altura, o peso e a idade em anos, de todos os alunos do grupo”. Questões envolvendo conceitos da Estatística Descritiva foram também consideradas, como exemplos:

- médio? (i) Qual grupo apresenta o menor peso médio? E qual possui o maior peso médio?
- média? (ii) Qual grupo apresenta a maior altura média? E qual possui a menor altura média?
- (iii) Em qual grupo encontra-se o aluno mais pesado? E o aluno mais leve?
- (iv) Em qual grupo encontra-se o aluno mais velho? E o aluno mais novo?
- vezes? (v) Para todos os alunos, de todos os grupos, qual é a idade que aparece mais vezes?

A questão número (v) pôde ser utilizada para introduzir o conceito de moda.

Sugerimos também que como motivação para a introdução dos conceitos iniciais de matrizes fosse utilizada “A matriz mágica”, apresentada em Gardner ( 1993, p. 71). Esta é uma matriz quadrada organizada de tal forma que o professor pode “adivinhar” a soma (ou produto) dos elementos escolhidos pelos alunos. O aluno deve escolher um e apenas um elemento em cada linha e coluna. As palavras linha e coluna não precisam ser utilizadas quando da realização da “brincadeira”, utiliza-se neste caso o traçado de linhas horizontais e verticais. Sem olhar, o professor sabe dizer qual é a soma dos números escolhidos pelos alunos.

Os conceitos básicos da teoria de matrizes, como adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes deverão ser obtidos pelos próprios alunos. O aluno deve ter participação ativa no “redescobrimto” destas operações e suas principais propriedades. Sem dúvida, a multiplicação de matrizes é o conceito mais difícil de ser compreendido pelos alunos neste nível de escolaridade.

Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares. Para o ensino médio este conceito deve ser introduzido através de exemplos mais simples e não é fácil para os alunos aceitarem naturalmente a tão “estranha” multiplicação entre matrizes.

Tanto para a sistematização da soma, subtração, multiplicação por escalar como produto de matrizes, utilizamos problemas “reais”, os quais induziram os alunos à construção destes conceitos matemáticos.

As maiores dificuldades das professoras com referência ao ensino deste tópico, como já era esperado, foram:

demonstrar aos alunos a aplicabilidade dos conteúdos. Para que serve, sem se prender a técnicas de resolução esquecendo da interpretação, do raciocínio, etc. (Professora A ).

mostrar a aplicação prática. Responder o “para que aprender?” e o “onde se usa?” (Professora B )

## **O TÓPICO DETERMINANTES**

Noções ligadas a determinantes são conhecidas desde 250 A.C., os chineses utilizavam estas noções no desenvolvimento de técnicas para a resolução de sistemas lineares. Apenas no século XIX é que os determinantes passaram a ser estudados mais sistematicamente, principalmente pelo matemático francês Cauchy – o inventor das matrizes. Cauchy foi quem deu o nome de determinante a função que a uma matriz associa um número. E foi Cayley em 1841, quem criou a notação usual – um quadrado de números com duas barras. Nesta mesma época o matemático francês Binet demonstrou o teorema da multiplicação de determinantes. Significativas contribuições para a teoria de determinantes foram obtidas pelo matemático alemão Jacobi (1804-1851).

Nos dias atuais, o uso de determinantes como um número associado a uma matriz quadrada mostra-se muito útil para caracterizar muitas situações, como a de saber se uma dada matriz é inversível, se um sistema linear admite ou não solução, se três pontos do plano cartesiano estão alinhados, cálculo da área de um triângulo determinado por três pontos do plano cartesiano e etc. Entendemos não ser necessário a apresentação de todas as propriedades sobre esta teoria. As principais propriedades devem surgir naturalmente da resolução de problemas. Neste nível de escolaridade, os alunos devem ser capazes de confirmar uma certa propriedade. Não se deve exigir a rigorosa demonstração matemática destas propriedades. Nem todos os alunos que concluem o ensino médio seguirão carreira na área de ciências exatas, muitos destes, se quer terão a oportunidade de ingressar em um curso de nível superior. Um estudo matemático rigoroso sobre determinantes envolve muitos símbolos, o que dificulta em muito a sua leitura e compreensão. A idéia básica é utilizar a resolução de problemas, para de uma maneira simples, introduzir este importante conceito matemático.

Para a introdução do conceito de determinante de uma matriz  $2 \times 2$ , sugerimos que o professor utilize o Método da Substituição para a resolução de um sistema linear com 2 equações e 2 incógnitas. Deixando as “contas” apenas indicadas, surge a Regra de Cramer e os 3 determinantes envolvidos no processo. Isto pode ser generalizado para um sistema com 3 equações e 3 incógnitas, embora o número de operações necessárias neste caso seja muito grande.

Infelizmente, as professoras não tiveram tempo de trabalhar este conteúdo. A Professora A mencionou em seu relatório final que pretende apresentar este tópico no início do ano letivo de 2007 e a Professora B trabalhou apenas a definição de determinantes para matrizes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ , usando a Regra de Sarrus.

## CONCLUSÕES FINAIS

Segundo Polya (1986),

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1986, prefácio 1<sup>a</sup> edição).

A utilização da metodologia de resolução de problemas em sala de aula é mais “ruidosa”, característica do trabalho em grupo. O professor deve procurar formas de motivar os alunos, pode oferecer prêmios e criar uma disputa entre grupos. Sempre existirão aqueles alunos desinteressados. Agora, com o conhecimento que o professor tem da sua classe, saberá dispersar estes alunos entre os vários grupos. Nunca se deve formar um grupo apenas com alunos desmotivados e desinteressados. Com o propósito de vencer cada etapa (resolver o problema) os próprios componentes do grupo irão exigir uma participação efetiva de todos, para o cumprimento daquela tarefa.

Nesta metodologia, o aluno torna-se ativo na construção de seu próprio conhecimento. Segundo os PCN<sub>+</sub> (1997, p. 129), “a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos”.

O que buscamos com este trabalho foi o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é para toda a vida. Procuramos, além de obter dos alunos um melhor desempenho em matemática, poder estar contribuindo com a formação plena do cidadão. Quantos são os problemas e quantas são as decisões que devemos tomar a cada dia de nossa vida?

Para os PCNs (2000),

em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. A matemática do Ensino Médio [...] ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo [...] é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL – a, 2000, p. 40).

Dos relatórios das duas professoras e também dos alunos, percebe-se a boa aceitação desta forma de trabalho, os alunos mostraram-se mais interessados em participar das atividades propostas. Obviamente, isto é muito pouco para se mudar o atual quadro da educação em Matemática na nossa região. Os professores devem participar anualmente de cursos de formação continuada, incentivados pela Diretoria Regional de Ensino, o que nem sempre acontece. Os professores devem receber um salário digno, condizente com a importância da posição social que ocupam dentro da sociedade. As duas professoras que participaram deste projeto ministravam mais de 40 horas/aula semanais. As duas professoras trabalhavam em duas cidades diferentes, distante uma da outra de aproximadamente 50 Km. Como exigir destes profissionais, um tempo maior para preparar suas aulas. Nesta metodologia, o professor deve “inventar” problemas interessantes e motivadores, para que a sua resolução produza a construção do conceito matemático. Não existe atualmente disponível no mercado, livros didáticos com este objetivo.

As duas professoras também participaram no ano de 2006 do projeto on-line, "Ensino Médio em Rede", que é um programa de formação continuada desenvolvido pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo e pela Fundação Vanzolini. O conteúdo desse projeto está voltado para o desenvolvimento curricular no Ensino médio e pressupõe o uso dos ambientes de ensino e aprendizagem e as mídias e tecnologias da Rede do Saber e do projeto "Prática de Leitura".

Deveria existir também uma melhor fiscalização nas escolas de licenciatura. Anualmente milhares de professores são formados em escolas de qualidade duvidosa e “jogados” no mercado. Os PCN+ estabelecem três motivos para se discutir a formação inicial de docentes,

Primeiro, [...] crônicos e reconhecidos problemas da formação docente constituem obstáculos para o desempenho do professor, [...] Segundo, as novas orientações promulgadas para a formação dos professores ainda não se efetivaram, [...] Terceiro, a formação profissional contínua ou permanente do professor deve se dar enquanto ele exerce sua profissão (PCN+, 1997, p. 139).

Segundo Polya (1997),

ninguém pode ensinar o que não aprendeu (POLYA, 1997, p. 2)

No nosso entender, ninguém pode ensinar o que não sabe, provavelmente vai ensinar errado. Um professor dedicado à sua profissão, terá condições de continuar aprendendo pelo resto de sua vida. Quantas são as inovações tecnológicas que devemos assimilar para o bom desempenho de nossas atividades diárias. Uma escola de boa qualidade, deve fazer com que o aluno aprenda a aprender.

Não advogamos que a Resolução de Problemas é a única e melhor forma para se ensinar matemática, esta é uma alternativa dentre muitas outras, que se bem trabalhada poderá favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Nesta metodologia, o aluno torna-se agente da construção do seu próprio conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas.

Mudar a forma de se ensinar matemática é tarefa árdua e lenta; mas só depende de nós, professores.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C. *Didáctica de la Estadística*. Granada. Universidad de Granada, ESP, 2001, 210p.

GARDNER, M. *Ah, apanhei-te*. Lisboa: Gradiva, 1993, 244p.

GRANDO, R. C. e FAZZION, M. F. *Álgebra e Geometria na Resolução de um Problema Clássico em Matemática: o problema dos cubos pintados*. Revista de Educação Matemática – SBEM - SP, n. 6 e 7, p.23 - 6, Catanduva - SP, 2001.

MENDONÇA, M. C. D. *Problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática*. Campinas: UNICAMP, 1993, Tese de Doutorado.

ONUICHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V. (Org). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. Editora UNESP, São Paulo(SP), p. 199 - 218, 1999.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1986.

\_\_\_\_\_. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S. E REYS, R. E. (Org). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução de Domingues, H. H. E Corbo, O. 4ª reimpressão. São Paulo: Atual Editora, 1997, 342p.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003, 151p.

SCHOROEDER, T. L., LESTER Jr., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. TRAFTON, P. R., SHULTE, A. P. (Ed.). *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – PCN+: Matemática. MEC, Brasília, 1997.

\_\_\_\_\_. a. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino médio – Parte III. MEC, Brasília, 2000.

\_\_\_\_\_. b. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino fundamental - Matemática. MEC, Brasília, 1997.